Тема 3. Основи цифрової логіки

3.1. Основні поняття алгебри логіки.

3.2 Основні логічні функції

3.1. Основні поняття алгебри логіки.

Алгебра логіки, розроблена в середині ІХ ст. ірландським математиком Д. Булем і є науковою основою роботи всіх цифрових пристроїв. У ній діють принципи, схожі зі звичайною алгеброю, але буквами (символами) позначають не числа, а висловлювання. В алгебрі Буля змінні приймають тільки два дискретних значення: логічна «1» приписується істинному висловом і логічний «0» – хибним (неістинним). Символи не можна розглядати як арифметичні числа, тобто алгебра логіки є алгеброю станів, а не чисел. Апарат алгебри логіки використовують як для аналізу, так і проектування (синтезу) логічних пристроїв будь-якої складності в системах цифрової обробки інформації. В цьому випадку можна проводити всі дослідження строго математично.

Аналіз логічних пристроїв проводять, розглядаючи вхідні сигнали $x_1, x_2,...,x_n$ в якості аргументів і представляючи відповідні вихідні сигнали логічного пристрою (ЛП) у вигляді функції y_i, як показано на рис. 3.1, а.

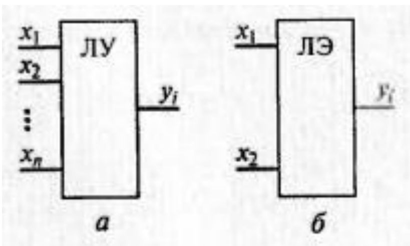


Рис. 3.1

В цьому випадку аналітичне співвідношення

$$y_i = f_i(x_i, x_2,\ldots,x_n)$$

встановлює в явному вигляді відповідність між значенням функції і всілякими значеннями комбінацій аргументів. Неважко помітити, що для n бінарних (приймаючих тільки два значення) аргументів можливе число комбінацій $Б_n$ типу«0», «1»:

Наприклад, при $n = 2$ маємо чотири наступні комбінації з двох елементів: 00; 01; 10; 11. При $n = 3$ маємо вісім комбінацій з трьох елементів: 000; 001; 010; 100; 011; 101; 110; 111. Тоді для розглянутого пристрою з одним бінарним виходом (див. рис. 3.1, а) загальне число різних логічних функцій (варіантів) становить

$$i_{[n]} = 2^{2^n}$$

На практиці для спрощення процедури аналізу складних ЛП їх представляють у вигляді комбінації найпростіших логічних елементів (ЛЕ) (рис. 3.1, б) по аналогії з елементарними ланками в структурних схемах автоматики. Як видно, для ЛЕ з двома вхідними сигналами x_1 і x_2 і одним виходом y_i

$$i_{[n]} = 2^{2^n} = 16$$

3.2. Основні логічні функції

Як зазначалося вище, логічні вирази можуть бути складними, тобто, як і раніше приймаючи лише два стани, являти собою комбінацію більш простих логічних виразів. Складні логічні вирази формуються з більш простих за допомогою логічних зв'язок, званих також логічними операціями. Розглянемо приклади найбільш поширених логічних функцій:

1. Логічне *додавання* або *диз'юнкція* позначається символом $\vee$ і називається також операцією АБО. Ця операція описується для найпростішої функції двох змінних x_1, і x_2 у вигляді логічної формули:

$$y_{\partial} = x_1 \vee x_2 \tag{3.1}$$

Співвідношення (3.1) означає, що функція y_{∂} дорівнює «1», якщо хоча б один з аргументів (x_1, або x_2) дорівнює «1».

Умовне позначення, таблиця істинності і інші показники цієї логічної функції наведені в табл. 3.1.

Зауважимо, що таблицею істинності називають функціональний взаємозв'язок значень вихідної величини y_i, – логічного пристрою кожної з можливих *i*-х комбінацій вхідних змінних $x_1, x_2, \dots x_n$, представлених в табличній формі. Як зазначалося, для функції *n* змінних таких комбінацій буде $Б_n=2^n$. У найпростішому випадку двох змінних x_1, і x_2 таблиця істинності буде налічувати $Б_n= 2^2 = 4$ комбінації цих змінних.

Аналізуючи табл. 3.1 можна відзначити, що стовпець y_2 відповідає операції логічного додавання. Найбільш просто цю операцію можна реалізувати за допомогою контактного ланцюга з двома паралельно включеними контактами. Сигнал y_{∂} на виході такого ланцюга з'явиться тільки в тому випадку, якщо хоча б один з контактів замкнутий.

У цифровій електроніці операцію логічного додавання легко реалізувати за допомогою двох діодів (з незалежними входами), працюючих на один навантажувальний пристрій з опором *R*. Принципова схема такого електронного кола представлена в табл. 3.1. Як видно зі схеми, сигнал на виході ланцюга, що відповідає логічній «1», має місце тільки в тому випадку, якщо на вході хоча б одного з діодів також існує сигнал, відповідний логічній «1». Цей сигнал відкриває діод, в результаті чого в навантажуваному пристрої з'являється струм, який забезпечує відповідне логічній «1» вихідну напругу кола.

2. Логічне *множення* або *кон'юнкція*, що позначається символом $\wedge$ і називається операцією І. Умовне позначення & кон'юнкції на логічних схемах називають *амперсандом*. Для зручності запису складних логічних функцій символ кон'юнкції можна умовно ототожнювати зі знаком звичайного множення. Для функції двох змінних в цьому випадку маємо

$$y_к = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 \qquad (3.2)$$

Співвідношення (3.2) показує, що $y_к = 1$ тільки в тому випадку, коли обидва аргументи (x_1, і x_2) стають рівними «1».

Умовне позначення та інші показники функції $y_к$ представлені в третьому стовпці (див. табл. 3.1). Операція логічного множення може бути реалізована контактним колом, принципова схема якої приведена в табл. 3.1, а принципова схема електричного кола, дія якої аналогічно контактної, показана в наступній комірці таблиці. Сигнал на виході електроного кола, що дорівнює приблизно $U_п$, що відповідає $y_к = 1$, можна отримати тільки в тому випадку, якщо обидва діоди замкнені, тобто на їх катоди поданий високий потенціал (по відношенню до анода), відповідає вхідним сигналам $x_1 = 1$ і $x_2 = 1$.

3. Логічне заперечення або інверсія позначається рискою над зміною і називається операцією НІ. Ця операція записується

$$y_{ін} = \overline{x} \qquad (3.2)$$

Операція НІ виконується над однією змінною x і значення $y_{ін}$ завжди протилежно значенню цієї змінної. Умовне позначення та інші показники функції $y_{ін}$ наведені в четвертому стовпці (табл. 3.1).

Реалізація логічної операції НІ може бути також здійснена контактним колом, але (на відміну від кіл, розглянутих раніше) за допомогою нормально замкнутих контактів електромагнітного реле. Відсутність напруги на обмотці реле ($x = 0$) передбачає замикання кола і появи сигналу на її виході, що відповідає логічній «1» ($y_{ін} = 1$). При наявності напруги (логічної «1») на обмотці реле ($x = 1$) ланцюг розімкнутий і сигнал на виході ланцюга відсутній ($y_i = 1$).

Логічна операція інверсії порівняно легко реалізується в електроніці ланцюгом найпростішого підсилювача при включенні транзистора в схему із загальним емітером (ЗЕ), яка володіє інвертуючою властивістю. Дійсно, коли транзистор працює в режимі насичення (при вхідній напрузі, що відповідає логічної «1»), вихідний сигнал $y_{ін} = U_{КЕ} \cong 0$ ($U_{КЕ}$ – напруга між колектором і емітером транзистора). Коли ж транзистор замкнений (при відсутності вхідного сигналу: $x = 0$), $y_{ін} = U_{КЕ} \cong U_п$, що відповідає логічній «1».

Зіставляючи таблиці істинності для операцій диз'юнкції і кон'юнкції можна обґрунтувати наступні співвідношення алгебри Буля, що мають велике практичне значення.

Принцип дуальності, який зручно виразити у вигляді двох положень:

$$\text{якщо } x_1 \vee x_2 = y_д, \text{ то } \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \bar{y}_д, \tag{3.3}$$

$$\text{якщо } x_1 \wedge x_2 = y_к, \text{ то } \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = \bar{y}_к, \tag{3.4}$$

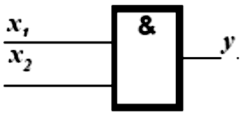
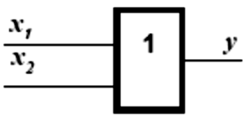
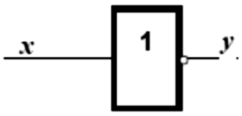
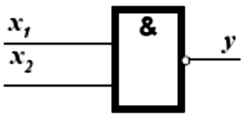
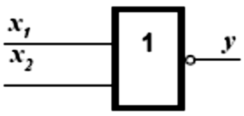
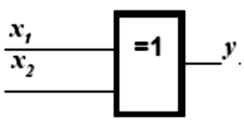
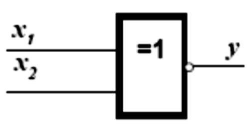
Правило де Моргана випливає як наслідок принципу дуальності і формулюється у вигляді двох логічних співвідношень:

$$\overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \wedge x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2; \tag{3.5}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Наведені співвідношення (3.3) ... (3.5) можна легко узагальнити для *n* вхідних сигналів x_1 x_2, x_n. Їх широко використовують для перетворення складних логічних функцій до простішого вигляду (мінімізації функцій) в процесі проектування (синтезу) логічних пристроїв цифрової електроніки.

Таблиця. 3.1.

			Таблиця істинності		
Логічна функція	**Умовне позначення**	**Булевий вираз**	**Входи**		**Вихід**
			x_1	x_2	y
І кон'юнкція		$x_1 \wedge x_2 = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1
АБО диз'юнкція		$x_1 \vee x_2 = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1
НІ інвертор		$x = \overline{x}$	0 1		1 0
І-НІ (штрих Шефера)		$\overline{x_1 \wedge x_2} = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0
АБО-НІ (стрілка Пірса)		$\overline{x_1 \vee x_2} = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0
заперечне АБО		$x_1 \oplus x_2 = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0
заперечне АБО-НІ		$\overline{x_1 \oplus x_2} = y$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 1

Розглянуті вище основні логічні операції І, АБО і НІ утворюють функціонально повний набір, тобто дозволяють реалізувати будь-які логічні функції (перетворення) комбінаційної логіки. Строго кажучи, для цієї мети можна обмежитися навіть двома операціями, наприклад АБО і НІ. Однак при використанні тільки цих трьох елементів не завжди вдається отримати логічні пристрої найпростішого виду. Тому в логічних системах знаходять застосування інші типові елементи, що реалізують інші логічні операції Особливе значення в цифровий мікроелектроніці приділяється двом універсальним логічним операціям, кожна з яких здатна самостійно утворити функціонально повний набір. Як відомо, в разі застосування тільки одного базового елемента спостерігається помітне ускладнення проектованих логічних пристроїв. Однак в інтегральної технології зручність виготовлення одного базового елементу має вирішальне значення. Тому універсальні логічні елементи складають основу більшості інтегральних цифрових мікросхем.

Універсальні логічні операції, які реалізуються базовими елементами, включають два наступні різновиди (для зручності збережемо існуючий стан нумерації операцій).

4. Функція Шеффера, що позначається символічно вертикальною рискою | (штрих Шеффера), відображає операцію І-НІ. Для найпростішої функції двох змінних x_1 і x_2 в цьому випадку отримують:

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2} = y_ш. \tag{3.7}$$

Формула (3.7) вказує на те, що функція $y_ш$ = 0 тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = 1$.

5. Функція Пірса, що позначається символічно вертикальною стрілкою (стрілка Пірса), висловлює операцію АБО-НІ. Для функції двох змінних x_1, і x_2 вона записується у вигляді

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = y_п. \tag{3.8}$$

Співвідношення (3.8) означає, що $y_п$ = 1 тоді і тільки тоді, коли x1 = x2 = 0.

Реалізацію операцій І-НІ і АБО-НІ не становить труднощів виконати контактними колами шляхом застосовуючи для цієї мети електромагнітних реле з нормально замкнутими (за відсутності сигналу на вході управління реле, відповідно і відсутності напруги на його обмотці) контактами. Для реалізації операції І-НІ електромагнітні реле включають в ланцюг паралельно, А в разі операції АБО-НІ – послідовно.