Практичне заняття №2
Особливості роботи з чисельними типами даних. Обчислення площ багатокутників

Затвердження: площа багатокутника, представленого замкнутої ламаної без самоперетинів, заданої своїми вершинами в порядку обходу, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k+X_{k+1})(Y_k-Y_{k+1})\right|, \qquad \underline{(1)}$$

где $(X_1,Y_1) = (X_{n+1},Y_{n+1})$

а) перевірити цю формулу на прикладі трикутникас з координатами вершин: (1,1) (4,2) (5,3)

За формулою (1) за даними координами повинна вийти площа **S=1**.

б)За формулою Герона при значеннях сторін (*a, b, c*) та півпериметра *p* площа трикутника також дорівнює 1:

a=	3,162278
b=	4,472136
c=	1,414214
p=	4,524314

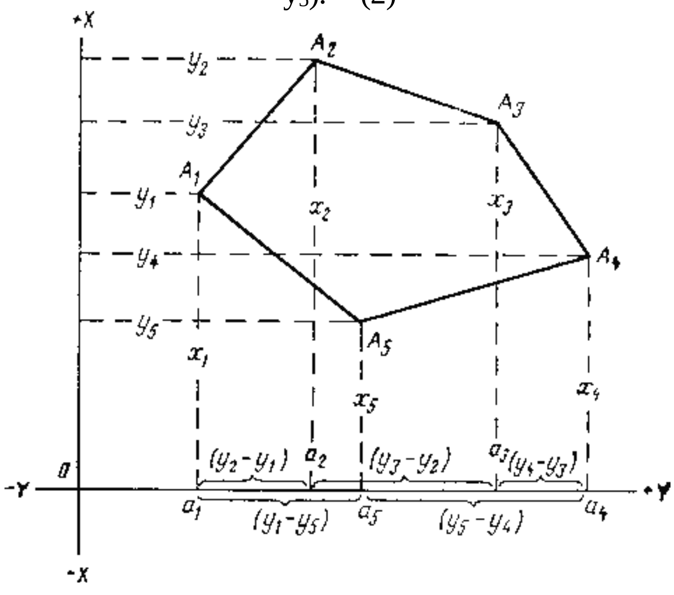
S=1

Пояснення формули (1)

Нехай потрібно визначити площу полігону А1, А2, А3, А4, А5 з координатами вершин x1, y1; x2, y2; x3, y3; x4, y4; x5, y5. Площа полігону S можна представити як сума площ трапецій, у яких абсциси є підставами, а різниці ординат сусідніх точок висотами

$$S = a_1A_1A_2a_2 + a_2A_2A_3a_3 + a_3A_3A_4a_4 - a_5A_5A_4a_4 - a_1A_1A_5a_5.$$

$$2S = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_3) + (x_4 + x_5)(y_5 - y_4) + (x_5 + x_1)(y_1 - y_5). \quad (2)$$



Визначення діапазону чисел, що представляються з фіксованою комою.

Визначити діапазон чисел, що представляються з фіксованою комою за основою 6, якщо на число відводиться 16 розрядів, з яких 10 - під цілу частину числа.

$$Diap = \max|a| = P^r\left(1 - P^{-t}\right), \tag{2}$$

Рішення. Використовується формула

a – число, яке надається в даній системі числення з фіксованою комою,

r – кількість розрядів, що відводяться під цілу частину числа *а*,

$t+1$ – кількість розрядів, що відводяться на все число *а*,

P – підставу системи числення.

$$t = 15,\ r = 10,\ P = 6,$$

$$Diap = \max|a| = P^r\left(1 - P^{-t}\right) = 6^{10}\left(1 - \frac{1}{6^{15}}\right) = 60\ 466\ 176$$

Переклад в десяткову систему чисел з НЕ десяткової системи

Розглянемо етапи перетворення числа з недесяткових позиційної системи в еквівалентну десяткову форму. Таке перетворення легко виходить простим обчисленням значення полінома, відповідного числа. Це обчислення можна, наприклад, виконати наступним чином:

1. Запис числа у вигляді поліному

$$d_{n-1}\ d_{n-2}\ldots d_0 d_{-1}\ldots d_{-m} = d_{n-1}b^{n-1} + d_{n-2}b^{n-2} + \ldots + d_0 b^0 + d_{-1}b^{-1} + \ldots + d_{-m}b^{-m},$$

де b - основа системи, виражене в десяткового формі, а d - цифри вихідної системи числення. Для тих систем, де цифри видаються буквами, останні при обчисленні замінюються на десяткові еквіваленти, наприклад A = 10, B = 11, C = 12 і т.д.

2. Обчислюємо значення полінома, користуючись десятковою системою числення.

Для ілюстрації перекладу з двійкової системи в десяткову систему розглянемо двійкове число 1110.12. Записуючи його у вигляді полінома за ступенями підстави 2, отримаємо

$$\begin{aligned} 1110{,}1_2 &= 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 + 1\times2^{-1} \\ &= 1\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 0\times1 + 1\times0{,}5 \\ &= 8+4+2+0+0{,}5 \\ &= 14{,}5_{10} \end{aligned}$$

Таким чином, 14.5 це десятковий еквівалент двійкового числа 1110.1.

Як другий приклад перетворимо в десяткову систему шістнадцяткове число $D3F.4_{16}$:

$$\begin{aligned} D3F{,}4_{16} &= D\times16^2 + 3\times16^1 + F\times16^0 + 4\times16^{-1} \\ &= 13\times16^2 + 3\times16^1 + 15\times16^0 + 4\times16^{-1} \\ &= 13\times256 + 3\times16 + 15\times1 + 4\times0{,}0625 \\ &= 3328+48+15+0{,}25 \\ &= 3391{,}25_{10} \end{aligned}$$

Переклад десяткового числа в еквівалентну форму в іншій системі числення складніший. В процесі перетворення доводиться порізно трансформувати цілу і дробову частини числа.

Розглянемо спочатку перетворення цілого десяткового N_I в систему числення з основою b (b - ціле позитивне число). Оскільки число в системі з основою b можна записати у вигляді полінома за ступенями невідповідність цифрами в якості коефіцієнтів, ми отримуємо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N_I = d_{n-1}b^{n-1} + d_{n-2}b^{n-2} + \ldots + d_1b^1 + d_0b^0} \\ \boldsymbol{= d_{n-1}b^{n-1} + d_{n-2}b^{n-2} + \ldots + d_1b^1 + d_0} \end{aligned} \qquad (3)$$

Тепер потрібно знайти цифри $\boldsymbol{d_{n-1}, \ldots, d_1, d_0}$ які задовольняють виписаним рівняння (2.3). Для цього розділимо обидві частини виразу на b. Отримаємо ціле приватне:

$$\boldsymbol{N' = d_{n-1}b^{n-2} + \ldots d_2b^1 + d_1b^0} \qquad (4)$$

залишок:

$$\text{Залишок}\left(\frac{N_I}{b}\right) = d_0$$

Таким чином, залишок дорівнює молодшої цифрі числа в системі числення з основою *b*, т.ч.. d_0 . В результаті поділу в залишку може виявитися більш однієї десяткової цифри, якщо b більше 10. Але оскільки залишок завжди менше b, то його значення буде відповідати цифрі d_0.

Якщо процес ділення повторити для цілого приватного N'_I, , ми отримаємо знову ціле приватне:

$$N'' = d_{n-1}b^{n-3} + \ldots + d_2b^0 \qquad (6)$$

Залишок:

$$\text{Залишок}\left(\frac{N'_I}{b}\right) = d_1 \qquad (7)$$

У цьому випадку залишок відповідає наступній справа цифрі числа з основою системи b. Легко бачити, що, повторюючи описаний процес, аж до нульового приватного, ми отримаємо всі цифри d_i рівняння для N_I. Зверніть увагу на те, що залишок слід кожен раз представляти цифрою в системі числення з основою b. Очевидно, що процес завершиться після кінцевого числа кроків. Розберемо описану процедуру на прикладі перекладу десяткового числа 52 в еквівалентну двійкову форму. Обчислення проводяться багаторазовим розподілом на 2:

Залишок:

52 |2	$0=d_0$
26 |2	$0=d_1$
13|2	$1=d_2$
6 |2	$0=d_3$
3 |2	$1=d_4$
1 |2	$1=d_5$
0	

Отже, $52_{10} = d_5\, d_4\, d_3\, d_2\, d_1\, d_0 = 110100_2$.

Як другий приклад розглянемо переклад десяткового числа 58 506 в шістнадцяткову систему. Послідовні ділення на 16 дають:

Ділення	Залишок	Значення залишку в шестнадцятковій системі обчислення
58 506 |16	10	$A=d_0$
3 656 |16	8	$8=d_1$
228 |16	4	$4=d_2$
14 |16	14	$E=d_3$
0		

Отже, $58\ 506_{10}= d_3\ d_2\ d_1\ d_0 = E48A_{16}$.

Процедура переведення правильної десяткового дробу в систему числення з основою b повинна бути дещо іншою. позначимо через N_F десяткову дріб, відповідну полиному (8):

$$d_{-1}b^{-1} + d_{-2}b^{-2} + \ldots + d_{-m}b^{-m} \qquad (8)$$

– де $d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-m}$ – цифри, які потрібно визначити. Оскільки поліном і N_F позначають одну і ту ж величину, то має місце рівність: (2.9):

$$N_F = d_{-1}b^{-1} + d_{-2}b^{-2} + \ldots + d_{-m}b^{-m} \qquad (9)$$

Помноживши обидві частини рівності (9) на b, отримаємо, (10):

$$\begin{aligned} b\,N_F &= d_{-1}b^{0} + d_{-2}b^{-1} + \ldots + d_{-m}b^{-m+1} \\ &= d_{-1} + d_{-2}b^{-1} + \ldots + d_{-m}b^{-m+1} \\ &= d_{-1} + N'_F \end{aligned} \qquad (10)$$

Добуток складається з цілої частини d_{-1} та дрібної частини N'_F. Ціла частина еквівалентна старшої цифри вихідної дробу в системі числення з основою b. Як і раніше, легко бачити, що ціла частина, відповідна d_{-1i}, лежить в діапазоні від 0 до $b\text{-}1$, и, отже, для систем з підставою, великим 10, ми повинні у відповідних випадках в якості цифр брати літери.

Якщо провести ті ж дії над дробової частиною результату $b\,N_F$, тобто. помножити його на b, то можна буде визначити наступну цифру розкладання дробу N_F .(11). А саме, оскільки:

$$\begin{aligned} b\,N'_F &= d_{-2}b^{0} + d_{-3}b^{-1} + \ldots + d_{-m}b^{-m+2} \\ &= d_{-2} + d_{-3}b^{-1} + \ldots + d_{-m}b^{-m+2} \\ &= d_{-2} + N''_F \end{aligned} \qquad (11)$$

то ціла частина добутку відповідає d_{-2}. Очевидно, повторюючи описаний процес, ми зможемо визначити наступні цифри числа у системі по підставі b. Процес припиняється, якщо виходить нульова дрібна частина. Однак на відміну від процесу перетворення цілих чисел, завжди закінчується через кінцеве число кроків, процес перетворення десяткового дробу може бути нескінченним. Іншими словами, уявлення десяткового дробу з кінцевим числом цифр може мати нескінченне число цифр в системі числення з іншою підставою. Тому в будь-якому випадку процес перетворення зупиняють при досягненні необхідної точності.

Наведемо два приклади перетворення десяткових дробів в різні системи числення.

Спочатку розглянемо переклад числа 0.6875 в двійкову форму:

добутки	Значення розрядів
$2 \times 0{,}6875 = 1{,}3750$	$d_{-1} = 1$
$2 \times 0{,}375 \;\; = 0{,}750$	$d_{-2} = 0$
$2 \times 0{,}75 \;\;\; = 1{,}50$	$d_{-3} = 1$
$2 \times 0{,}5 \;\;\;\; = 1{,}0$	$d_{-4} = 1$

В результаті ми отримуємо $0{,}6875_{10} = 0.d_{-1}\, d_{-2}\, d_{-3}\, d_{-4} = 0{,}1011_2$.

Тепер переведемо десяткову дріб 0,8435 в шістнадцяткову систему. Необхідно виконати наступний ланцюжок умножений:

добутки	Значення розрядів
$16 \times 0{,}8435 = 13{,}496$	$d_{-1} = D$
$16 \times 0{,}496 \;\; = 7{,}936$	$d_{-2} = 7$
$16 \times 0{,}936 \;\; = 14{,}976$	$d_{-3} = E$
$16 \times 0{,}976 \;\; = 15{,}616$	$d_{-4} = F$

Зупинивши процес на цьому етапі, ми отримаємо $0.8435_{10} = 0.d_{-1}\; d_{-2}\; d_{-3}\; d_{-4} = 0.D7EF\ldots_{16}$.

На цьому прикладі видно, що процес перетворення нескінченний, оскільки третя цифра дробової частини на всіх етапах дорівнює 6.

Для змішаних десяткових чисел ціла і дробова частини обробляються порізно. Ціла частина перетворюється послідовними поділами, а дробова - послідовними множеннями. Виходять в результаті змішане число записується у вигляді цих двох частин між якими ставиться крапка.

Завдання для виконання

Завдання 1. Обчислити площу багатокутника, заданого координатами вершин (варіанти завдань див. нижче)

Варіанти завдань

Варіанти до задання 1

Варіант 1

(150,49) (221,78) (219,121) (208,158) (167,182)
(108,192) (72,171) (59,133) (76,115) (91,97)
(75,78) (67,58) (79,47) (98,30) (118,22)
(136,30) (143,37)

Варіант 2

(414,42) (274,45) (190,34) (132,21) (72,54)
(56,107) (42,152) (60,221) (108,252) (156,285)
(204,307) (247,304) (296,303) (359,304) (403,303)
(452,294) (464,255) (461,223) (460,193) (466,173)
(437,156) (386,146) (348,121) (353,86) (371,75)
(410,70) (422,52)

Варіант 3

(69,43) (110,46) (147,50) (186,45) (238,37)
(298,34) (344,34) (396,57) (429,79) (482,149)
(485,215) (488,273) (443,314) (350,307) (271,299)
(207,275) (177,206) (136,168) (97,141) (47,95)
(49,71) (56,57)

Варіант 4

(114,146) (147,106) (167,84) (224,56) (277,47)
(373,41) (441,45) (456,101) (453,147) (453,213)
(425,245) (382,270) (330,273) (290,248) (300,199)
(238,195) (197,212) (151,209) (105,190) (104,163)

Варіант 5

(42,51) (76,48) (117,48) (150,42) (204,41)
(228,85) (240,133) (243,193) (272,221) (265,275)
(207,274) (149,271) (103,261) (75,229) (93,172)
(84,149) (48,134) (26,107) (26,86) (27,71)
(37,57)

Варіант 6

(62,300) (105,303) (159,304) (217,303) (257,302)
(320,292) (373,280) (421,234) (439,187) (449,144)
(430,107) (403,78) (354,65) (298,54) (208,49)
(169,42) (113,45) (79,67) (66,123) (59,156)
(65,198) (104,202) (147,220) (153,242) (131,249)
(87,256) (71,267)

Варіант 7

(514,19) (515,56) (506,107) (492,154) (386,186)
(314,185) (283,234) (205,233) (134,220) (78,202)
(68,179) (67,148) (82,118) (90,94) (92,59)
(94,42) (107,29) (155,32) (199,60) (224,51)
(245,37) (279,31) (306,32) (342,28) (365,22)
(397,16) (443,26) (468,39) (488,32)

Варіант 8

(64,304) (55,281) (53,257) (71,217) (74,181)
(45,155) (43,128) (53,108) (70,89) (95,77)
(108,56) (133,50) (190,55) (253,71) (287,54)
(326,50) (381,56) (413,65) (430,115) (428,158)
(412,192) (364,222) (318,243) (261,253) (224,268)
(182,278) (134,290) (105,294)

Варіант 9

(52,289) (46,258) (63,240) (94,234) (132,236)
(184,234) (198,207) (171,181) (120,171) (92,157)
(49,134) (43,99) (63,82) (109,69) (157,59)
(202,57) (245,51) (278,47) (309,41) (340,31)
(379,33) (415,61) (430,86) (447,140) (474,196)
(483,245) (471,274) (411,292) (350,302) (299,308)

(250,309) (193,308) (154,308) (111,309) (84,302)

Варіант 10

(50,162) (62,123) (71,92) (82,73) (112,58)
(159,40) (217,34) (264,31) (299,29) (354,29)
(402,27) (435,32) (476,77) (489,97) (503,140)
(506,181) (508,219) (497,243) (483,248) (419,256)
(382,228) (370,199) (362,151) (342,125) (288,121)
(257,160) (248,211) (239,247) (207,267) (181,273)
(119,271) (101,250) (87,217) (105,188) (81,179)
(62,176)

Варіант 13

(34,129) (34,113) (50,62) (71,48) (117,43)
(175,47) (219,56) (261,60) (309,60) (356,52)
(390,53) (411,84) (408,131) (386,172) (341,247)
(331,254) (292,262) (261,280) (222,286) (165,283)
(130,285) (82,285) (49,272) (46,254) (56,237)
(102,224) (113,201) (107,182) (96,175) (54,175)
(35,171) (27,146)

Варіант 14

(79,154) (98,132) (106,110) (90,94) (66,70)
(73,54) (100,50) (140,48) (166,47) (208,44)
(252,41) (282,40) (309,41) (361,37) (394,34)
(423,35) (449,58) (472,101) (487,145) (479,171)
(468,206) (442,241) (432,254) (361,280) (326,276)
(257,272) (200,269) (117,266) (68,267) (45,243)
(35,222) (44,201) (78,196) (130,193) (125,171)
(103,164)

Завдання 2. Обчислити діапазон чисел, що представляються з фіксованою комою на підставі, якщо на число відводиться розряд, з яких - під цілу частину числа (варіанти завдань див. нижче).

Варіант до завдання 2

Варіант	P	t	r
1	2	16	8
2	3	8	0
3	4	32	16
4	5	8	0
5	2	32	8
6	3	16	8
7	4	16	8
8	5	16	8
9	2	64	16
10	3	8	0
11	4	8	0
12	5	8	0

13	2	8	0
14	4	8	0

Завдання 3. Провести число з двійкової системи в десяткову (варіанти завдань див. нижче)

Варіант до завдання

Варіант	Число
1	1000010001
2	1000010010010
3	10000100101
4	111100010011
5	1111100011101
6	111000100111
7	1111100011001
8	10000000001
9	100011111001
10	10101010101010
11	1000100010001
12	10001001001001
13	1011011011011
14	1011101110111

Завдання 4. Провести число з десяткової системи в двійкову (варіанти завдань див. нижче)

Варіант до завдання 4

Вариант	Число
1	123
2	145
3	451
4	334
5	222
6	161
7	332
8	828
9	444
10	333
11	111
12	192
13	141
14	432