7. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ. ЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ

Потрібно попередньо вивчити характеристику логічних елементів. Навести електричні схеми логічних елементів АБО, І, НЕ та правила виконання логічних операцій над двійковими змінними між їх входами і виходами, див. [1] с.206-218.

Задачі для самостійного розв'язку

Для функціональної схеми, наведеної на рисунку 7.1, визначити сигнали на виходах Y_1, Y_2 і Y_3; значення сигналів на входах X_1, X_2, X_3 і X_4 дані в табл.7.1.

Таблиця 7.1.

Варіант	X_1	X_2	X_3	X_4	Варіант	X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	0	0	0	10	1	0	1	0
1	0	0	0	1	11	1	0	1	1
2	0	0	1	0	12	1	1	0	0
3	0	0	1	1	13	1	1	0	1
4	0	1	0	0	14	1	1	1	0
5	0	1	0	1	15	1	1	1	1
6	0	1	1	0	16	0	1	0	1
7	0	1	1	1	17	0	1	1	0
8	1	0	0	0	18	1	0	1	0
9	1	0	0	1	19	1	0	0	0

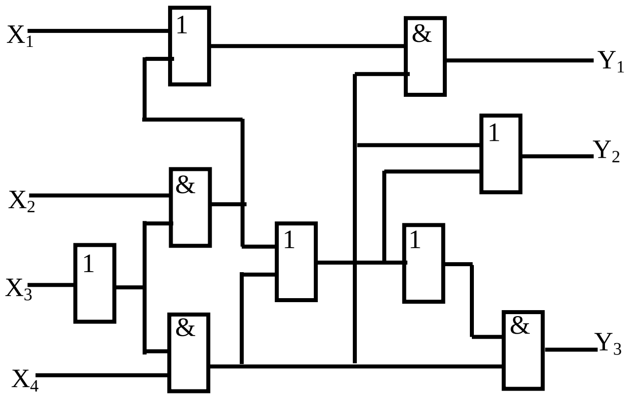

Рис.7.1

Записати вирази для функцій виходів Y_1, Y_2 і Y_3, мінімізувати ці вирази, побудувати електричну схему на логічних елементах І, АБО, НЕ для мінімізованих функцій.

Форми представлення булевих функцій

Одну і ту ж булеву функцію можна представити різними формами. Форми, які представляються сумою елементарних добутків, – це диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ). Елементарними називаються такі добутки, в яких співмножниками є окремі змінні або їх заперечення $x_1 \cdot \overline{x_2}$, $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$, ..., а ДНФ буде складатись із суми цих елементарних добутків $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Очевидно, що одну і ту ж функцію можна представити множиною різних ДНФ. Але є такі ДНФ, в яких функцію можна записати єдиним способом. Такі форми називаються досконалими диз'юнктивними нормальними формами (ДДНФ) – це сума елементарних добутків, в яких кожна змінна трапляється один раз або із запереченням, або без нього.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2} \text{ – це ДНФ.}$$

Для перетворення цієї функції в ДДНФ треба кожен елементарний добуток доповнити тією змінною, якої бракує, але так, щоб тотожність не порушувалась. Так, перший добуток домножимо на $x_1 \vee \overline{x_1} = 1$, а другий на $x_3 \vee \overline{x_3} = 1$ (правило виключення третього).

Отримаємо ДДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}x_3(x_1 \vee \overline{x_1}) \vee x_1\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) =$$
$$= x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Тут в кожному добутку кожна змінна трапляється тільки один раз.

Ця функція перетворюється в логічну одиницю при трьох різних комбінаціях значень вхідних змінних:

$x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$ – перша комбінація,

$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$ – друга комбінація,

$x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$ – третя комбінація.

Таблиця істинності для цих змінних (табл.7.2) має три рядки, в яких функція дорівнює 1. Тобто, таблиця істинності функції має стільки рядків, де функція дорівнює 1, скільки елементарних добутків має її ДДНФ.

Таблиця 7.2

1	2	3	$f(x_1,x_2,x_3)$
			0
			1
			0
			0
			1
			1
			0
			0

Маючи таблицю істинності значень функції, запишемо ДДНФ функції за таким правилом: для всіх комбінацій вхідних змінних, для яких функція дорівнює одиниці, записати добутки, інвертуючи всі змінні, які в цій комбінації мають нульове значення, а всі елементарні добутки з'єднати знаком логічного додавання.

Застосуємо три елементарні добутки: $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $x_1\overline{x_2}x_3$. Якщо їх з'єднати знаком логічного додавання, то отримаємо ДДНФ.

Для запису структурного рівняння у ДНФ схеми, рис.13.1, функції, що реалізуються кожним логічним елементом схеми записані структурні рівняння для виходів Y_1, Y_2 і Y_3, відповідно матимуть вигляд:

$Y_1 = \overline{(X_1 \vee \overline{(X_2 \wedge \overline{X_3})}) \wedge (X_4 \wedge \overline{X_3})};$

$Y_2 = \overline{(X_4 \wedge \overline{X_3}) \vee \overline{\overline{(X_4 \wedge \overline{X_3}) \vee \overline{(X_2 \wedge \overline{X_3})}}}};$

$Y_3 = \overline{\overline{(X_4 \wedge \overline{X_3}) \vee \overline{(X_2 \wedge \overline{X_3})}}} \wedge (X_4 \wedge \overline{X_3})$.

Мінімізація булевих функцій

Мінімізація булевих функцій – це спрощення булевих виразів. Оскільки логічні функції реалізуються за допомогою певного набору пристроїв, то, спрощуючи вираз, зменшуємо кількість елементів. Розрізняють аналітичні і табличні методи мінімізації.

Аналітичні – це методи перетворень з використанням законів перетворень булевих виразів. Для прикладу, мінімізуємо функцію трьох змінних, що задана її ДДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Об'єднаємо попарно перший з третім добутки і винесемо за дужки

$$y = x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2(x_1 \vee \bar{x}_1x_3) =$$
$$= \bar{x}_2(x_1 \vee x_3)(x_1\bar{x}_1) = \bar{x}_2(x_1 \vee x_3)$$

Ця формула є простішою, ніж ДДНФ.

Мінімізувати задану ДДНФ можна інакше.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}.$$

Доповнимо функцію ДДНФ четвертим елементарним добутком за правилом $x \vee x = x$, і об'єднаємо попарно добутки перший з третім, другий з четвертим.

$$y = (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3) = \bar{x}_2x_3(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) =$$ Результат одержимо
$$= \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2(x_1 \vee x_3)$$
такий же самий, як і в попередньому випадку

До методів мінімізації належать методи, засновані на використанні графічного представлення таблиць істинності логічних функцій та інші.

Мінімізоване структурне рівняння для виходу Y_3, схема рис.7.1, буде мати вигляд: $Y_{3min} = X_4 \wedge \overline{X_3} \vee \overline{X_2 \wedge \overline{X_3}}$.