# Електростатика.

## Приклади розв'язування задач

**Задача1.** Два однакових негативних заряди величиною $Q_1$=$Q_2$= 9 нКл знаходяться у воді на відстані *l*=8 см один від одного. Визначити напруженість і потенціал поля в точці, розташованій на відстані *r*=5 см від зарядів.

Напруженість поля, в точці *A* (рис. 1), яку створюють заряди $Q_1$ і $Q_2$ згідно з принципом суперпозиції полів, дорівнює векторній сумі напруженостей, створюваних кожним із зарядів зокрема:

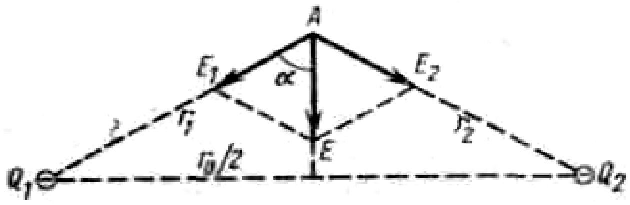


Рис. 1

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad (1)$$

За теоремою косинусів,

$$E = \sqrt{{E_1}^2 + {E_2}^2 + 2E_1E_2\cos 2\alpha}\,. \qquad (2)$$

Напруженість поля точкового заряду Q:

$$E = Q / 4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon r^2,$$

де ε – діелектрична проникність; $\varepsilon_0$ – електрична стала; r – відстань від заряду до точки поля, в якій визначається його напруженість. Заряди $Q_1 = Q_2$ від'ємні, тому вектори $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ направлені вздовж ліній напруженості до зарядів. За умовою задачі, заряди $Q_1 = Q_2$ і розташовані на однаковій відстані від точки *A,* тому $E_1 = E_2$. Таким чином , формула (2) матиме вигляд:

$$E = 2E_1\cos\alpha\,, \text{ де, } \cos\alpha = h / r_1$$

$$h = OA = h = OA = \sqrt{r_1 - r_o/4} \quad h = \sqrt{\left(5\cdot 10^{-2}\right) - \left(4\cdot 10^{-2}\right)} = 3\cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Тому напруженість у точці *A* буде

$$E = \frac{2Q_1 \cdot h}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^3} \qquad (3)$$

$$E = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-9} Кл \cdot 3 \cdot 10^{-2} м}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 81 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} Ф/м \cdot (0{,}05)^3 м^3} = 480 В/м.$$

Потенціал *φ*, що створюється системою точкових зарядів у даній точці поля, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, які створюються кожним із зарядів: $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$. Тому потенціал φ результуючого поля в точці *A* дорівнює $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Так як потенціал поля, створений точковим зарядом, рівний: $\varphi = Q/4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$, то отримаємо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{2Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} \qquad (4)$$

$$\varphi = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-9} Кл}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 81 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} Ф/м \cdot 5 \cdot 10^{-2} м} = -40 В.$$

Підставляючи у формули (3) і (4) числові значення *r* можна побудувати графічні залежності цих величин.

**Задача 2.** Вздовж тонкого дротяного кільця радіусом 10*см* рівномірно розподілений додатній заряд $5{,}0 \cdot 10^{-9}$*Кл*. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця в точках, розміщених від центру кільця на відстанях, рівних 0, 5, 15 см. Побудувати графік $E = f(L)$. На якій відстані від центра кільця напруженість електричного поля матиме максимальне значення?

Візьмемо елемент кільця $d\ell$. Заряд $dq$, який знаходиться на ньому можна вважати точковим. Тоді напруженість електричного поля в точці A, створена цим $d\ell$:

$$dE = dq / 4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 r^2.$$

Вона направлена вздовж радіус-вектора $\vec{r}$, від елемента кільця до точки A в якій знаходимо напруженість.

Згідно принципу суперпозиції результуюча напруженість в точці A рівна векторній сумі напруженостей полів, створених в цій точці кожним елементом кільця з зарядом $dq$. Виразимо вектор $d\vec{E}$ через складові $d\vec{E}_\tau$, направлену вздовж осі кільця, і $d\vec{E}_n$, направлену перпендикулярно осі.

$$d\vec{E} = d\vec{E}_\tau + d\vec{E}_n,$$

Складові $d\vec{E}_n$ кожних двох діаметрально протилежних елементів взаємно компенсуються. Це пояснюється тим, що для кожного елемента зарядом $dq$ існує діаметрально протилежний елемент зарядом $dq'$, тому

$$d\vec{E}_n + d\vec{E}'_n = 0 .$$

Отже, результуюча напруженість в точці А рівна сумі складових напруженостей вздовж осі кільця, а модуль напруженості рівний сумі модулів цих складових, так як напрямки їх однакові. Складова

$$dE_\tau = dE\cos\alpha = dE\frac{L}{r} = \frac{Ldq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} ,$$

тоді

$$dE = \frac{Ldq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} .$$

Враховуючи це, отримаємо:

$$E = \int \frac{Ldq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} = \frac{L}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3}\int dq = \frac{Lq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} . \qquad (1)$$

Із теореми Піфагора: $r^2 = R^2 + L^2$, що дає в кінцевому результаті напруженість електричного поля на осі кільця:

$$E = \frac{Lq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}} . \qquad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення отримаємо напруженості Е рівні: 0; $1{,}6\cdot10^3$; $1{,}2\cdot10^3$ В/м. Помістивши початок координат в центр кільця можна побудувати залежність $E = f(L)$.

Виразимо величини *r* та *L* через кут α. Матимемо:

$$L = r\cos\alpha, \quad r = R/Sin\alpha .$$

Тоді формула (1) прийме вигляд:

$$E = \frac{Lq}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} = \frac{r\cos\alpha\cdot q}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^3} = \frac{\cos\alpha\cdot q}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 r^2} .$$

$$E = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$$

Для знаходження максимального значення напруженості Е знайдемо похідну $dE/d\alpha$ та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0 R^2}(2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha)=0\ ,$$

або
$$tg^2\alpha=2\,.$$

Тоді напруженість електричного поля має максимальне значення в точці А, яка розміщена на відстані:

$$L=r\cos\alpha=\frac{R}{\sin\alpha}\cos\alpha=R/tg\alpha=R/\sqrt{2}=7{,}1\,см$$

від центра кільця.

## Закони постійного струму.

## Приклади розв'язування задач

**Задача 3.** Джерело струму з е.р.с. $\varepsilon$ і внутрішнім опором $r$ замкнуте на реостат. Виразити потужність $P_1$, яка виділяється на зовнішній частині кола як функцію сили струму. Побудувати графік залежності цієї функції. При якій силі струму потужність буде максимальною.

Повна потужність джерела струму

$$P=I\varepsilon\,.$$

Частина цієї потужності

$$P_2=I^2r$$

виділяється всередині, інша у зовнішній частині кола:

$$P_1=I\varepsilon-I^2r\,. \qquad (1)$$

Графіком цієї функції являється парабола, вітки якої направлені вниз. Перетворимо вираз (1):

$$P_1=r\left(I^2-2\frac{\varepsilon}{2r}I+\frac{\varepsilon^2}{4r^2}-\frac{\varepsilon^2}{4r^2}\right)=-r\left(I-\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{4r}\,. \qquad (2)$$

Звідси видно, координати вершини параболи знаходяться в точці

$$I_1=\varepsilon/(2r),\ P_{1m}=\varepsilon^2/(4r)\,.$$

Таким чином при силі струму

$$I_1=\varepsilon/(2r) \qquad (3)$$

потужність, що виділяється у зовнішній частині кола буде мати максимальне значення:

$$P_{1m} = \varepsilon^2 / (4r).$$

Нехай зовнішня ділянка кола має опір *R*, при якому сила струму рівна $I_1$. Тоді згідно закону Ома для замкнутого кола

$$I_1 = \varepsilon / (R + r).$$

Порівнюючи даний вираз з формулою (3) знаходимо, що

$$R = r.$$

Таким чином корисна потужність (потужність, яка виділяється зовнішній ділянці кола) максимальна в тому випадку, коли внутрішній опір джерела рівний опору зовнішньої ділянки кола. Пи цьому КПД джерела

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{r}{2r} = 0,5 \quad \text{або} \quad \eta = 50\%.$$

З графіка також видно, що при силі струму короткого замикання $I_0 = \varepsilon / r$ корисна потужність рівна нулю.

**Задача 4.** Джерела струму, е.р.с. якого $\varepsilon$ і внутрішній опір *r*, замкнуте на зовнішній опір R. При зміні опору сила струму в колі також змінюється. Знайти залежність КПД джерела від сили струму *I*. Накреслити графік цієї залежності.

ККД джерела струму

$$\eta = \frac{P_1}{P}, \qquad (1)$$

де $P_1$ − потужність, що виділяється на зовнішньому колі (корисна потужність); *P* − повна потужність джерела. Корисну потужність можна виразити як різницю між повною потужністю і потужністю $P_2$, яка виділяється всередині джерела:

$$P_1 = P - P_2.$$

При силі струму ***I*** і е.р.с. $\boldsymbol{\varepsilon}$ будемо мати

$$P = I\varepsilon, \quad P_2 = I^2 r,$$

де *r* − внутрішній опір джерела. Тоді

$$P_1 = I\varepsilon - I^2 r.$$

Підставивши значення $P_1$ і $P_2$ у формулу (1), отримаємо:

$$\eta = \frac{I\varepsilon - I^2 r}{I\varepsilon} = 1 - \frac{r}{\varepsilon} I.$$

Графіком залежності КПД джерела η від сили струму *I* являється пряма. Видно, що при силі струму $I_0 = \varepsilon / r$ тобто при короткому замиканні, КПД джерела рівний нулю.